تتمة أمثلة من المحاضرة السابقة :

3) المجموعات المنتهية أو المنتهية التمام finite or cofinite

لتكن E مجموعة ما ولتكن الشبكة $(P(E), \subseteq)$

نقول عن المجموعة A من E بأنها منتهية التمام اذا

كانت CA منتهية

إن أسرة المجموعات المنتهية أو المنتهية التمام من E

والتي نرمزها FC(E) تكون شبكة جزئية من

P(E)

- اذا كانت A, B منتهيتين فإن :

$A \cap B$ و $A \cup B$ منتهيتين

أي إن كل منهما ينتمي إلى FC(E)

- اذا كانت كل من A ، B منتهية التمام ⇐

كل من $\complement A$ و $\complement B$ منتهية $\Leftarrow$

$\complement A \cap \complement B$ و $\complement A \cup \complement B$ منتهيتين

وبالتالي فإن:

$\complement A \cup B$ و $\complement A \cap B$ منتهيتين

$\Leftarrow$ $A \cup B$ و $A \cap B$ منتهي التمام

وبالتالي فإن كل منهما ينتمي إلى $F_C(E)$

بفرض أن A منتهية و B منتهية التمام

$\Leftarrow$ $A \cap B$ منتهية وتنتمي إلى $F_C(E)$

B منتهية التمام $\Leftarrow$ $\complement B$ منتهية

$\complement A \cup B = \complement A \cap \complement B$ منتهية $\Leftarrow$

$A \cup B$ منتهية التمام $\Leftarrow$

$A \cup B \in F_C(E)$

ففي جميع الحالات الممكنة تكون $F(E)$

شبكة جزئية من $P(E)$

ملاحظة

لا يمكن تعريف منتهية التمام لمجموعة معينة

اذا كانت E منتهية وبالتالي عند استخدام كلمة

منتهية التمام نستطيع أن E مجموعة غير منتهية

مورفيزمات أنصاف الشبكات

نفرض أن كل من E و E' نصف شبكة

عليا باعتبار انه كل منها مجموعة مرتبة يمكن أن

نعرف بينهما مورفيزم الترتيب f (أو التطبيق المتزايد)

ولكن في الحالة العامة f لا تحافظ على الحد

الأعلى الأصغري

مثال

يفرض أن $E=(N^*,|)$ و $E'=(N^*,\leq)$

فإذا اخذنا f التطبيق المطابق على N^* يكون

عندئذ متزايد لأنه اذا كان $x|y$ فإن $x\leq y$

لكن f لا يحافظ على الحد الأعلى الأصغري

في E $4\vee 6=12$ في E' $4\vee 6=6$

$$f(4\vee 6)=f(12)\neq 6=f(6)=f(4)\vee f(6)$$

$$=4\vee 6=6$$

تعريف

ندعو التطبيق f من نصف الشبكة العليا E

في نصف الشبكة العليا E' مورفيزم نصف الشبكة

العليا أو $\vee$- مورفيزم اذا تحقق من أجل

أي عنصرين x,y من E العلاقة:

$$f(x\vee y) = f(x)\vee f(y).$$

كما نعرف مورفيزم نصف الشبكة الدنيا أو

$\wedge$- مورفيزم بالشكل:

$$f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y) \quad : \forall x,y\in E$$

مبرهنة

أي $\vee$- مورفيزم أو $\wedge$- مورفيزم ، يكون تطبيق

متزايد

البرهان

من أجل $\vee$- مورفيزم ، اذا كان $x\le y$

حيث $x,y\in E$ فإن:

$f(x \vee y) = f(y) \Leftarrow x \vee y = y$

$\Leftarrow f(x) \vee f(y) = f(y) \Leftarrow$

متزايد لهومورفيزم $f \Leftarrow f(x) \leq f(y)$

ترتيب

تعريف

نعرف $\vee$ - ايزومورفيزم بأنه $\vee$ - مورفيزم بالاضافة

الى انه تقابل

مبرهنة هامة ٥/١٥/١

ليكن $f : E \to E'$ تطبيق من نصف الشبكة

العليا E في نصف الشبكة العليا E' فإن القضايا

التالية متكافئة:

1) f هو $\vee$ - ايزومورفيزم

حل f هو ايزومورفيزم ترتيب

البرهان
لان مبرهنة سابقة

$2 \Leftarrow 1$) ليكن f هو لا ايزومورفيزم

من E على E' فهذا يعني ان f تقابل

ومتزايد (لانه لاتومورفيزم)

كما ان f^{-1} متزايد وذلك لانه بفرض

$f(x) \le f(y) \Leftarrow f(x) \vee f(y) = f(y)$

$\Leftarrow f(x \vee y) = f(y) \xLeftarrow{f \text{ تقابل}} x \vee y = y$

$\Leftarrow x \le y$

وبالتالي فان f يكون ايزومورفيزم ترتيب

$1 \Leftarrow 2$) ليكن f ايزومورفيزم ترتيب

من مبرهنة سابقة $\Leftarrow$ f يحفظ الحدود العليا الاصغرية.

لنفرض المبرهنة: اذا كان $f: E \to E'$ ايزومورفيزم

ترتيب و $A \subseteq E$ و S هو الحد

الاعلى الاصغري للمجموعة A في E فإن:

$$f(\sup_E A) = \sup_{F} f(A)$$

$$f(\sup_E \{x, y\}) = \sup_{E'} f(\{x, y\})$$

$$= \sup_{E'} \{f(x), f(y)\} \Rightarrow$$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

أي أن f هو $\vee$- ايزومورفيزم

ملاحظة

لدينا نتيجة مماثلة من أجل $\wedge$- مورفيزم

مورفيزمات الشبكات

بفرض أن كل من E و E' شبكة

ولتكن $f: E \to E'$ تطبيق من E في E'

نقول عن التطبيق f انه $\vee$-مورفيزم اذا

كان من أجل أي عنصرين x, y من E فإن:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

ونقول عن f انه $\wedge$-مورفيزم اذا كان من

أجل أي عنصرين x, y من E فإن:

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

لكن هذين المفهومين غير متكافئين في الحالة

العامة.

مثال

لتكن E فضاء طبولوجية T أسرة

المجموعات المفتوحة في E

نعرف التطبيق $f: P(E) \to P(E)$ بالشكل

التالي :

$$f(X) = \overline{X} \quad ; \quad \forall X \in P(E)$$

فيكون :

$$\forall X, Y \in P(E) \; ; \; f(X \cup Y) = \overline{X \cup Y}$$

$$= \overline{X} \cup \overline{Y} = f(X) \cup f(Y)$$

أي أن f هو $\cup$ ايزومورفيزم

$$\forall X, Y \in P(E) \; ; \; f(X \cap Y) = \overline{X \cap Y}$$

$$\neq \overline{X} \cap \overline{Y} = f(X) \cap f(Y)$$

أي ان f ليس $\cap$ ايزومورفيزم

تعريف

يسمى التطبيق $f: E \to E'$

من البيان G في البيان G' بأنه

مورفيزم بيان اذا كان ايزومورفيزم و مورفيزم

بنفس الوقت .

ملاحظة

من مارأينا سابقاً في تعريف البيان فإن

كل مورفيزم بيان يكون مورفيزم ترتيب أي

تطبيق متقايس

كما نعرف ايزومورفيزم البيان بأنه مورفيزم

البيان بإضافة إلى انه تقابل

مبرهنة

اذا كانت $f : G \to G'$ مورفيزم من البيان G

في البيان G' فإن القضايا التالية متكافئة :

المادة : نظرية الشبكات المحاضرة: الخامسة .

1) f ايزومورفيزم شبكة

2) f ايزومورفيزم ترتيب

3) f ∨- ايزومورفيزم

4) f ∧- ايزومورفيزم .

البرهان

لقد رأينا سابقاً أن التكافؤ بين القضايا (2) و(3) و(4)

ولبرهن الآن التكافؤ بين (1) و(4)

4 ⇐ 1 واضح

1 ⇐ 4) لنفرض أن f هو ∧- ايزومورفيزم ⇐

f تقابل و f متزايد

لنفرض أن $f(x) \leq f(y)$ ⇐ $f(x) \wedge f(y) = f(x)$

⇐ $f(x \wedge y) = f(x)$ ⇐ $x \wedge y = x$ ⇐ $x \leq y$

نبرهن أن f متباين وبالتالي فإن f ايزومورفيزم مشبكة

ومكسات برهنت على أن له طريقة ثانية

2⇐1) f ايزومورفيزم مشبكة ⇐ f هو $\vee$-ايزومورفيزم

⇐ f ايزومورفيزم ترتيب

1⇐2) f ايزومورفيزم ترتيب ⇐

f هو $\vee$-ايزومورفيزم

f هو $\wedge$-ايزومورفيزم ⇐ f ايزومورفيزم مشبكة

المرشحات والمثاليات

في هذه الفقرة سوف نفرض من أجل التبسيط (رغم أنه ليس ضروريًا من أجل التعريف) بأن كل مشبكة أو شبكة تمتلك عنصرًا أصغر (يرمز له 0) وعنصرًا أكبر (يرمز له 1)

المرشحات في نصف الشبكة الدنيا

لتكن E نصف شبكة دنيا.

تعريف:

نسمي المجموعة الجزئية غير الخالية F من E مرشحة من E

إذا حققت ما يلي:

1) اذا كان $x \in F$ و $x \leq y$ فإن $y \in F$

2) اذا كان $x \in F$ و $y \in F$ فإن $x \wedge y \in F$

ملاحظات

1) إن الشرط (2) يبين بأن كل مرشحة تكون نصف شبكة دنيا جزئية (لكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة)

2) ان E هي نفسها مرشحة في E والتي تسمى بالمرشحة غير الفعلية inpropre

وكل مرشحة F مختلفة عن E تسمى مرشحة فعلية proper

3) اذا كانت card E ≥ 2 عندئذ يوجد على الاقل مرشحة فعلية واحدة وهي {1} على سبيل المثال

4) من الشرط (1) للمرشحة ينتج أن العنصر 1 ينتمي الى جميع المرشحات

5) من الشرط (1) للمرشحة ينتج أن المرشحة F تكون فعلية اذا وفقط اذا كان $0 \notin F$

المرشحات المولدة

1) ليكن a عنصراً ثابتاً في نصف الشبكة الدنيا E ونعرف المجموعة F_a بالشكل التالي :

$$F_a = \{x \in E ; x \geq a\}$$

عندئذ فإن F_a تكون مرشحة عن E وذلك لأن :

- اذا كانت $x \in F_a$ و $y \geq x$ فإن $y \geq x \geq a$
$\Rightarrow y \in F_a$

$\Leftarrow \quad y \in F_a$

- اذا كان $x, y \in F_a \Leftarrow x \geq a$ ، $y \geq a$

$\Leftarrow \quad x \wedge y \geq a \Leftarrow x \wedge y \in F_a$

نسمي مثل هذه المرشحة F_a بالمرشحة الرئيسية المولدة بالعنصر a ويكون a العنصر الاصغر في F_a ، وبالعكس اذا كانت F مرشحة تملك عنصر اصغر مثل a فإن هذه المرشحة تكون مولدة بـ a

انتهت المحاضرة